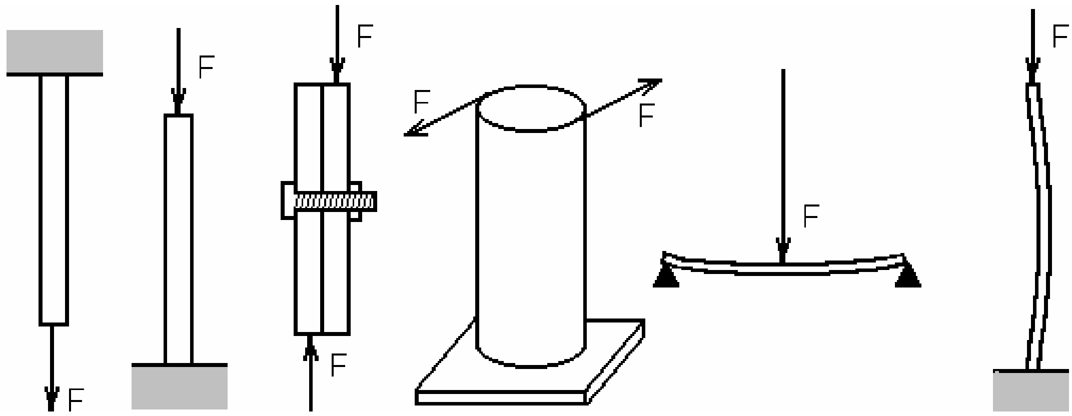
1. Μηχανικές ιδιότητες των στερεών

1.1 Καταπονήσεις και είδη παραμορφώσεων των στερεών

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 1.2, μεταξύ των ατόμων, ή μορίων των στερεών ασκούνται συγχρόνως τόσο ελκτικές όσο και απωστικές δυνάμεις, οι οποίες τα συγκρατούν σε ορισμένες σχετικές μεταξύ τους αποστάσεις, όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται ελάχιστη. Για να παραμορφώσουμε ένα στερεό σώμα, πρέπει να μεταβάλλουμε αυτές τις σχετικές αποστάσεις, επομένως πρέπει να ασκήσουμε εξωτερική δύναμη. Όταν ασκούμε σε ένα στερεό σώμα εξωτερική δύναμη, λέμε ότι το σώμα υφίσταται **καταπόνηση**. Ανάλογα με τον τρόπο, που καταπονείται το σώμα έχουμε τα αντίστοιχα είδη παραμορφώσεων. Οι δυνατές καταπονήσεις είναι ο **εφελκυσμός** και η **θλίψη**, η **διάτμηση**, η **στρέψη**, η **κάμψη** και ο **λυγισμός**.



6 – 1   6 – 2   6 – 3   6 – 4   6 – 5

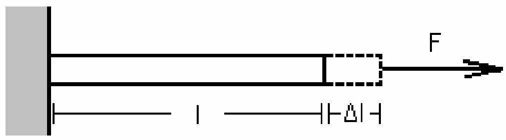
Στον εφελκυσμό (σχήμα 6-1) το σώμα τείνει να επιμηκυνθεί κατά τη διεύθυνση της δύναμης, ενώ στη θλίψη τείνει να επιβραχυνθεί κατά τη διεύθυνση της δύναμης. Εφελκυστικές δυνάμεις ασκούνται στα σκοινιά, στα συρματόσκοινα, στα καλώδια κλπ, ενώ οι κολώνες των κτηρίων δέχονται θλιπτικές δυνάμεις από τα υπερκείμενα βάρη. Στη διάτμηση ασκείται ένα ζεύγος αντιθέτων δυνάμεων. Διατμητικές δυνάμεις δέχονται π.χ. οι βίδες, που συγκρατούν κατακόρυφα ελάσματα, όπως στο παράδειγμα του σχήματος 6-2. Η στρέψη είναι ένα είδος διάτμησης, το οποίο τείνει να στρεβλώσει το σώμα (σχήμα 6-3). Δυνάμεις στρέψης δέχονται οι βίδες όταν τις βιδώνουμε, οι άξονες που μεταφέρουν την κίνηση στους τροχούς κλπ. Στην κάμψη το σώμα παραμορφώνεται κατά τη διεύθυνση της δύναμης και σχηματίζει τόξο, όπως στο σχήμα 6-4. Δυνάμεις κάμψης ασκούνται στα δοκάρια, στις γέφυρες, στους εξώστες κλπ. Στο λυγισμό (σχήμα 6-5) το σώμα παραμορφώνεται σε διεύθυνση κάθετη στην ασκούμενη δύναμη. Λυγισμό υφίστανται λεπτά στελέχη, ή στύλοι, που δέχονται μεγάλες δυνάμεις κατά τη διεύθυνση του άξονά τους.

1.2 Ελαστικές παραμορφώσεις

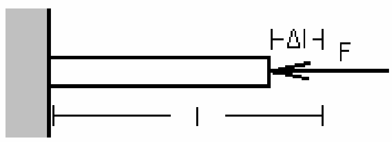
Η παραμόρφωση λέγεται **ελαστική**, αν το σώμα επανέρχεται στην αρχική κατάστασή του μετά την άρση της δύναμης. Αν η παραμόρφωση παραμένει μετά την άρση της δύναμης, τότε λέγεται **πλαστική**. Ελαστική είναι η παραμόρφωση ενός ελατηρίου, που συμπιέζουμε. Αντίθετα η παραμόρφωση του υγρού πηλού, του στόκου κλπ είναι πλαστική. Σε μερικές περιπτώσεις το σώμα επανέρχεται τελείως μετά από κάποιο χρονικό διάστημα. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι το σώμα παρουσιάζει **ελαστική αδράνεια**.

1.3 Εφελκυσμός και θλίψη. Ο νόμος του Hooke

Στον εφελκυσμό το σώμα επιμη-κύνεται κατά τη διεύθυνση της δύναμης (σχήμα 7-1) και στη θλίψη επιβράχυνση, ή αρνητική επιμήκυνση κατά τη διεύθυν-ση της δύναμης (σχήμα 7-2) το πηλίκο της επιμήκυνσης Δl προς το αρχικό μη-κος l του σώματος είναι η:



7 – 1



7 – 2

ανηγμένη επιμήκυνση

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}} \qquad (7\text{-}1)$$

Το πηλίκο της δύναμης F προς το εμβαδόν S της διατομής είναι η:

τάση εφελκυσμού $$\boxed{\sigma = \frac{F}{S}} \quad \text{σε } \frac{N}{m^2}, \text{ ή } \frac{N}{mm^2} \qquad (7\text{-}2)$$

Παράδειγμα 1-1

Σε νήμα διαμέτρου $d = 1mm$ και μήκους $l = 2m$ ασκείται εφελκυστική δύναμη $F = 12N$. Το νήμα επιμηκύνεται κατά $\Delta l = 6mm$. Να υπολογιστούν: α) η ανηγμένη επιμήκυνση β) η τάση σε N/m^2.

Λύση

α) $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{6mm}{2m} = \frac{0,006m}{2m}$ $\qquad \varepsilon = 0,003$

β) $\sigma = \frac{F}{S}$ $\qquad S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1mm}{4} = \frac{\pi \cdot \left(10^{-3}m\right)^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^{-6}m^2}{4} =$

$= 0,785 \cdot 10^{-6}m^2$

$\sigma = \frac{12N}{0,785 \cdot 10^{-6}m^2}$ $\qquad \boxed{\sigma = 1,53 \cdot 10^7 \frac{N}{m^2}}$

Ο Άγγλος Φυσικός **Robert Hooke** (1655-1703) διατύπωσε πειραματικά ότι:

Στις μικρές παραμορφώσεις η ανηγμένη επιμήκυνση είναι ανάλογη της ασκούμενης τάσης.

νόμος Hooke $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma}$ (8-1)

Η σταθερά αναλογίας Ε λέγεται **μέτρο ελαστικότητας**, ή **μέτρο του Young** από το όνομα του Άγγλου Φυσικού **Thomas Young** (1773-1829), ο οποίος δημοσίευσε πειραματικά δεδομένα για την τιμή του μέτρου ελαστικότητας σε διάφορα υλικά. Η μονάδα μέτρησης του μέτρου ελαστικότητας είναι $1N/m^2$, ή $1N/mm^2$.

Παράδειγμα 1-2

Να υπολογιστεί το μέτρο ελαστικότητας του νήματος του παραδείγματος 1-1

Λύση

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\cdot\sigma \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1{,}53\cdot 10^{7}\,\frac{N}{m^2}}{0{,}003}$$

$$\boxed{\varepsilon = 5{,}1\cdot 10^{9}\,\frac{N}{m^2}}$$

Παράδειγμα 1-3

Το μέτρο ελαστικότητας του χαλκού είναι $1{,}3\cdot 10^{11}\,N/m^2$. Να υπολογίσετε τη δύναμη, που πρέπει να ασκήσουμε, ώστε να επιμηκύνουμε κατά $\Delta l = 1mm$ σύρμα διαμέτρου $d = 1{,}5\,mm$ και αρχικού μήκους $l = 3\,m$.

Λύση

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{1}{E}\cdot\sigma = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{S} \quad \Rightarrow \quad F = E\cdot S\cdot\frac{\Delta l}{l}$$

$$S = \frac{\pi\cdot d^2}{4} = \frac{\pi\cdot(1{,}5\,mm)^2}{4} = 1{,}77mm^2 = 1{,}77\cdot 10^{-6}\,m^2$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1mm}{3\,m} = \frac{0{,}001m}{3\,m} = 3{,}33\cdot 10^{-4}$$

$$F = 1{,}3\cdot 10^{11}\,\frac{N}{m^2}\cdot 1{,}77\cdot 10^{-6}m^2\cdot 3{,}33\cdot 10^{-4} \qquad \boxed{F = 76{,}6N}$$

Στον πίνακα 1-1 περιέχονται οι μέσες τιμές του μέτρου ελαστικότητας μερικών υλικών. Παρατηρούμε ότι τα μέταλλα έχουν σημαντικά μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας από τα άλλα υλικά.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1

Υλικό	E N/m^2
<u>Μέταλλα</u>	
σίδηρος	$2{,}1\cdot 10^{11}$
χαλκός	$1{,}3\cdot 10^{11}$
αλουμίνιο	$0{,}7\cdot 10^{11}$
μαγνήσιο	$0{,}45\cdot 10^{11}$
<u>Άλλα υλικά</u>	

ξύλο:	
παράλληλα στις ίνες	$1,1\text{-}1,6 \cdot 10^{10}$
κάθετα στις ίνες	$0,5\text{-}1,1 \cdot 10^{10}$
καουτσούκ	$8 \cdot 10^{6}$
εβονίτης	$2,6 \cdot 10^{8}$
γρανίτης	$5 \cdot 10^{10}$
μάρμαρο	$4 \cdot 10^{10}$

Θέτουμε στο νόμο του Hooke (εξίσωση 8-1) την τιμή $\varepsilon = 1$ για την ανηγμένη επιμήκυνση και διαπιστώνουμε ότι:

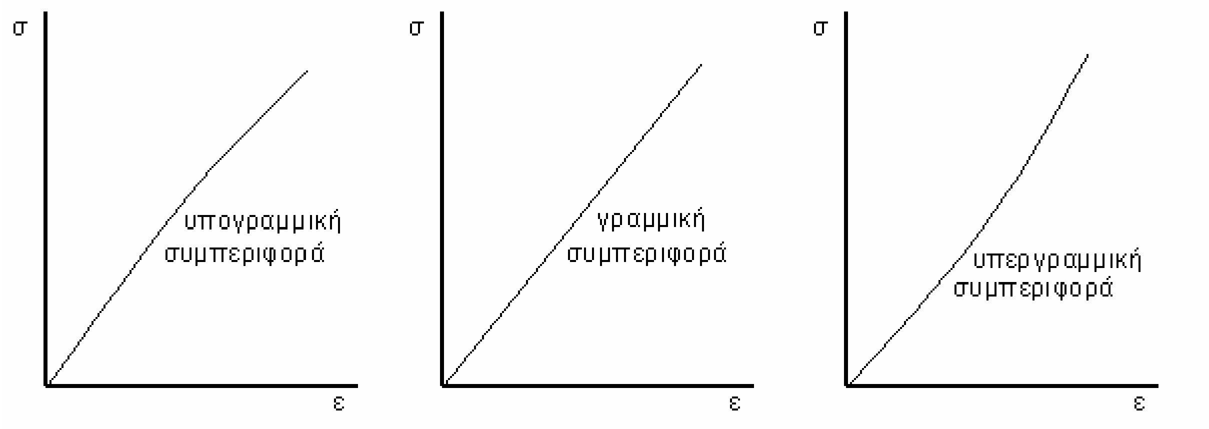
Το μέτρο ελαστικότητας είναι ίσο με την τάση με την οποία πρέπει να τείνουμε το σώμα, για να διπλασιάσουμε το μήκος του.

Στη διαπίστωση αυτή πρέπει να επισημάνουμε ότι με εξαίρεση λίγα υλικά, που διαθέτουν πολύ μεγάλη ελαστικότητα όπως το καουτσούκ, δεν είναι δυνατό να ασκήσουμε ποτέ τόσο μεγάλη τάση στα συνηθισμένα υλικά, γιατί θα σπάσουν πολύ πριν διπλασιαστεί το μήκος τους.

1.4 Το διάγραμμα εφελκυσμού

Ο νόμος του Hooke, δηλαδή η αναλογία μεταξύ της ανηγμένης επιμήκυνσης και της ασκούμενης τάσης ισχύει- όπως γνωρίσαμε- για μικρές παραμορφώσεις. Τα περισσότερα υλικά εξακολουθούν όμως να συμπεριφέρονται ελαστικά και για μεγαλύτερες παραμορφώσεις. Διακρίνουμε έτσι τρεις περιπτώσεις ελαστικής συμπεριφοράς.

Στην πρώτη περίπτωση, που αφορά υλικά όπως το χυτοσίδηρο, το χαλκό, το μπετόν, τις πέτρες κλπ, η περιοχή ισχύος του νόμου του Hooke είναι πολύ περιορισμένη συγκρινόμενη με όλο το εύρος της ελαστικής περιοχής, η δε ασκούμενη τάση είναι πρακτικά υπογραμμική συνάρτηση της ανηγμένης επιμήκυνσης όπως εικονίζεται στο σχήμα 10-1. Αντίθετα ο χάλυβας και τα ξύλα είναι υλικά, τα οποία ικανοποιούν το νόμο του Hooke σε ολόκληρο το εύρος της ελαστικής περιοχής. Στην περίπτωση αυτή η τάση είναι γραμμική συνάρτηση της επιμήκυνσης όπως στο σχήμα 10-2. Η Τρίτη περίπτωση αφορά λίγα υλικά όπως το καουτσούκ και το δέρμα. Η τάση είναι υπεργραμμική συνάρτηση της ανηγμένης επιμήκυνσης όπως εικονίζεται στο σχήμα 10-3.



$\boxed{10-1}$ $\boxed{10-2}$

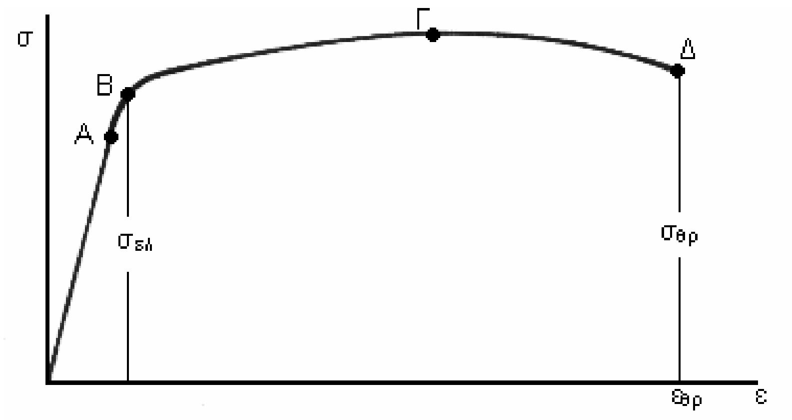
$\boxed{10-3}$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι το μέτρο ελαστικότητας παραμένει σταθερό συναρτήσει της ανηγμένης επιμήκυνσης μόνο στα υλικά που ακολουθούν αυστηρά το νόμο του Hooke, δηλαδή στη δεύτερη περίπτωση, η δε τιμή του είναι ίση προς την κλίση της ευθείας $\varepsilon-\sigma$. Στις δύο άλλες περιπτώσεις, δηλαδή στην υπογραμμική και την υπεργραμμική συμπεριφορά, το μέτρο ελαστικότητας εξαρτάται από την ανηγμένη επιμήκυνση, η δε τιμή του για μιαν ορισμένη ανηγμένη επιμήκυνση είναι ίση προς την κλίση της αντίστοιχης καμπύλης στο σημείο αυτό. Επομένως:

Η τιμή του μέτρου ελαστικότητας εξαρτάται από την ανηγμένη επιμήκυνση είναι ίση προς την κλίση του διαγράμματος της ασκούμενης τάσης συναρτήσει της ανηγμένης επιμήκυνσης.

Επίσης:

Επειδή στα περισσότερα υλικά η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας συναρτήσει της ανηγμένης επιμήκυνσης είναι σχετικά μικρή, λαμβάνουμε συνήθως ως τιμή του εκείνη, που αντιστοιχεί στο μέσον της ελαστικής περιοχής.

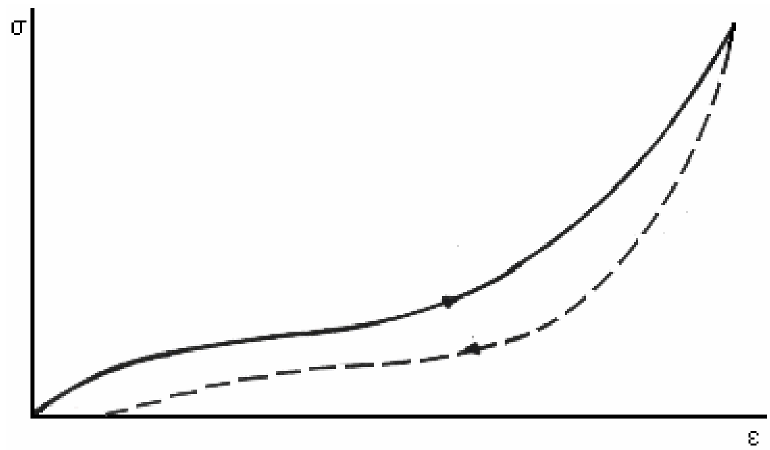


11–1

Αν η εφαρμοζόμενη τάση εφελκυσμού υπερβεί μιαν ορισμένη τιμή $\sigma_{\varepsilon\lambda}$, που λέγεται **όριο ελαστικότητας**, τότε η παραμόρφωση γίνεται πλαστική. Το σώμα δεν επανέρχεται επομένως στις αρχικές διαστάσεις του μετά την άρση των ασκουμένων τάσεων. Περαιτέρω αύξηση της τάσης οδηγεί το υλικό σε θραύση. Η τιμή $\sigma_{\vartheta\rho}$ της τάσης στην οποία θραύεται το υλικό, λέγεται **όριο θραύσης**. Στο σχήμα 11-1 εικονίζεται ένα διάγραμμα εφελκυσμού, που αφορά το χάλυβα. Στην περιοχή ΟΑ η συμπεριφορά είναι γραμμική σύμφωνα με το νόμο του Hooke, όμως η ελαστική περιοχή επεκτείνεται ως το σημείο Β. Η πλαστική συμπεριφορά οριοθετείται από τα σημεία Β και Γ. Εκεί το υλικό εφελκύεται πιο εύκολα. Η περιοχή ΓΔ λέγεται **περιοχή διαρροής** και χαρακτηρίζει το υλικό πριν τη θραύση. Η **επιμήκυνση θραύσης** $\varepsilon_{\vartheta\rho}$ αντιστοιχεί στο καταληκτικό σημείο του διαγράμματος εφελκυσμού.

Σε μερικά υλικά, όπως στο γυαλί και τα κεραμικά, η επιμήκυνση θραύσης είναι μικρότερη από την επιμήκυνση, που αντιστοιχεί στο όριο ελαστικότητας. Αυτό σημαίνει ότι τα υλικά αυτά δε μπορούν να παραμορφωθούν πλαστικά, αφού θραύονται πριν εισέλθουν στην πλαστική περιοχή.

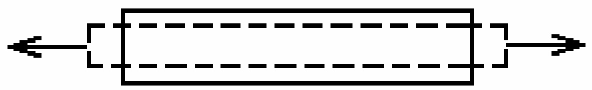
Όταν η παραμόρφωση περιορίζεται στην ελαστική περιοχή, τότε το διάγραμμα εφελκυσμού για την παραμόρφωση και την επαναφορά συμπίπτουν. Σε ορισμένα υλικά όμως όπως π.χ. στο κοινό λάστιχο αυτά τα δύο διαγράμματα δε συμπίπτουν. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **ελαστική υστέρηση**. Στο σχήμα 12-1 εικονίζεται ο βρόχος, που σχηματίζουν το διάγραμμα εφελκυσμού και το διάγραμμα επαναφοράς για το κοινό λάστιχο. Πρέπει να προσέξουμε το ιδιαίτερο σχήμα του διαγράμματος εφελκυσμού.



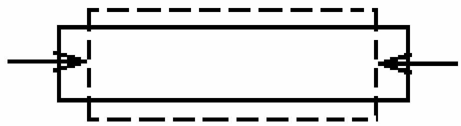
12 – 1

1.5 Εγκάρσια συστολή και διαστολή στον εφελκυσμό και τη θλίψη. Συμπιεστότητα

Όταν εφελκύουμε μια ράβδο, τότε εξ αιτίας της αύξησηςτου μήκους της συστέλλεται η εγκάρσια διατομή της όπως στο σχήμα 12-2. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **εγκάρσια συστολή**. Το αντίθετο συμβαίνει όταν η ράβδος θλίβεται.(σχήμα 12-3). Εκεί παρατηρείται διαστολή της διατομής της ράβδου. Πρέπει να σημειώσουμε ότι για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα εφελκυσμού ενός υλικού, λαμβάνουμε για την τάση την αρχική διατομή.



12 – 2



12 – 3

Μια ειδική περίπτωση θλίψης αποτελεί η ομοιόμορφη εξάσκηση πίεσης p σε όλη την επιφάνεια του σώματος. Η ελάττωση ΔV του όγκου του σώματος δίνεται τότε από την εξίσωση:

συστολή όγκου στη συμπίεση $\boxed{\Delta V = \kappa \cdot p \cdot V}$

(13-1)

όπου: $\kappa =$ **συμπιεστότητα** σε $\frac{1}{Pa} = Pa^{-1}$ ($1Pa$ (Pascal) $= 1\frac{N}{m^2}$ = μονάδα πίεσης)

Το αντίστροφο της συμπιεστότητας είναι το:

μέτρο ελαστικότητας όγκου $\boxed{\gamma = \frac{1}{\kappa}}$ σε $\frac{N}{m^2}$, ή $\frac{N}{mm^2}$ (13-2)

Μέσω του μέτρου ελαστικότητας όγκου λαμβάνουμε το νόμο του Hooke για τη συμπιεστότητα:

νόμος Hooke για τη συμπιεστότητα $\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{\gamma} \cdot p}$ (13-3)

2 Ιδιότητες των ρευστών

2.1 Τα ρευστά

Ο όρος **ρευστά** περιλαμβάνει τα υγρά και τα αέρια. Στην παράγραφο 1.1 έγινε ήδη αναφορά στις διαφορές μεταξύ των τριών καταστάσεων της ύλης, και γνωρίσαμε ότι σε αντίθεση με τα στερεά, όπου οι μέσες θέσεις των δομικών στοιχείων (ατόμων, ή μορίων) παραμένουν αμετάβλητες, στα υγρά- και πολύ περισσότερο στα αέρια- οι σχετικές θέσεις των δομικών στοιχείων μεταβάλλονται. Αυτό οδηγεί στην εξής ιδιότητα

Τα ρευστά (υγρά και αέρια) λαμβάνουν το σχήμα του χώρου, στον οποίο περιέχονται.

Η διαφορά μεταξύ υγρών και αερίων συνίσταται στο ότι τα υγρά έχουν πολύ μικρή συμπιεστότητα σε σύγκριση με εκείνη των αερίων. Η συμπιεστότητα του νερού π.χ. είναι $\kappa = 5 \cdot 10^{-10} \text{Pa}^{-1}$. Αυτό σημαίνει ότι αν ασκήσουμε πίεση μιας επί πλέον ατμόσφαιρας στο νερό ($\approx 10^5 \text{Pa}$) η σχετική μεταβολή του όγκου του θα είναι μόλις $0{,}005\%$. Αντίθετα στον ατμοσφαιρικό αέρα η αντίστοιχη μεταβολή είναι 50%.

2.2 Τα ρευστά σε ισορροπία

2.2.1 Η αρχή του Pascal

Η πίεση είναι το βασικό μέγεθος, που υπεισέρχεται στις εξισώσεις της Μηχανικής των ρευστών. Η πίεση είναι μονόμετρο μέγεθος και είναι ίση προς το πηλίκο το μέτρου της δύναμης F, που ασκείται **κάθετα** σε επιφάνεια προς το εμβαδόν S της επιφάνειας.

πίεση $\boxed{p = \frac{F}{S}}$ σε $Pa = \frac{N}{m^2}$

(21-1)

Η πίεση συμβολίζεται με το πεζό λατινικό p. Στο SI μονάδα πίεσης είναι το **Pascal** (**Pa**). Πίεση 1Pa είναι ίση με εκείνη, που ασκείται από δύναμη 1N σε επιφάνεια εμβαδού $1m^2$. Σε σύγκριση με τις συνηθισμένες τιμές πίεσης της καθημερινής πρακτικής η τιμή αυτή είναι πολύ μικρή και αντιστοιχεί στην πίεση, που ασκεί με το βάρος του ένα πολύ λεπτό φύλλο Αλουμινίου πάχους μόλις 0,04mm, ή το 1:100000 περίπου της τιμής της ατμοσφαιρικής πίεσης. Για το λόγο αυτό οι τιμές των πιέσεων αποδίδονται σε πολλαπλάσια της μονάδας Pascal.

Ένα συνηθισμένο πολλαπλάσιο της μονάδας Pascal είναι το **bar**. Ισχύει:

$\boxed{1bar = 10^5 Pa}$

(22.1)

Πίεση 1bar έχουμε στο νερό σε βάθος 10,2m περίπου. Η κανονική τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης είναι ίση προς $p_n = 1{,}013\,bar$. Συχνά χρησιμοποιείται και το πολλαπλάσιο **hectopascal** (**hPa**):

$\boxed{1hPa = 100Pa}$ $\boxed{1bar = 1000\,hPa}$ $\boxed{1mbar = 1hPa}$

Η κανονική ατμοσφαιρική πίεση είναι επομένως 1013hPa, ή 1013mbar. Πρέπει να σημειώσουμε ότι:

Στις υπολογιστικές εξισώσεις, όπου εμπλέκονται περισσότερα φυσικά μεγέθη, η πίεση πρέπει να εκφράζεται σε Pascal.

Κατά το παρελθόν γινόταν χρήση και άλλων μονάδων, οι οποίες τείνουν να εγκαταλειφθούν σήμερα συμφωνα με τους διεθνείς κανονισμούς. Οι μονάδες αυτές ήσαν είτε πρακτικές (Torr, mmHg, Atm), είτε σχετίζονταν με άλλα συστήματα μονάδων (at, PSI). Επειδή αρκετά τεχνικά χαρακτηριστικά αναφέρουν ακόμα τις μονάδες αυτές, παρατίθεται στον πίνακα 2.1 η αντιστοιχία τους σε bar.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.1

(Αντιστοιχία προγενεστέρων μονάδων πίεσης σε bar)

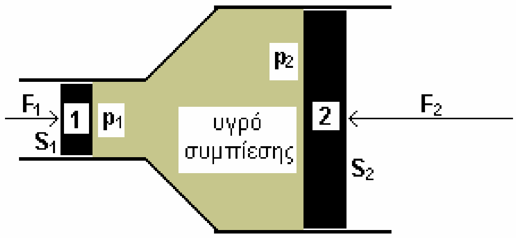
Μονάδα	**Ορισμός**	**Αντιστοιχία**

mmHg	πίεση προερχόμενη από στήλη Hg ύψους 1mm	760mmHg=1,013bar
Torr	1Torr=1mmHg	όπως το mmHg
Atm (φυσική ατμόσφαιρα)	πίεση ίση με την κανονική ατμοσφαιρική στο υψόμετρο της θάλασσας	1Atm=1,013bar
at (τεχνική ατμόσφαιρα)	πίεση ασκούμενη από δύναμη 1kp (9,81N) σε επιφάνεια $1cm^2$	1at=0,981bar
PSI	πίεση ασκούμενη από το βάρος 1lbs (4,44N)σε επιφάνεια $1in^2$ (1in=2,54cm)	1PSI=0,0688bar 14,5PSI=1bar

Μια βασική ιδιότητα των ρευστών που βρίσκονται σε ισορροπία είναι ότι αν ασκήσουμε πίεση σε ένα σημείο τους, τότε η πίεση αυτή μεταφέρεται ομοιόμορφα σε όλη την έκταση του ρευστού. Η πρόταση αυτή, που είναι γνωστή ως **αρχή του Pascal** (Blaise **Pascal**, 1623-1662, Γάλλος Φιλόσοφος, Μαθηματικός και Φυσικός) βρίσκει εφαρμογή στο **υδραυλικό πιεστήριο**, μια διάταξη, που χρησιμοποιούμε για να ανυψώνουμε μεγάλα βάρη.

Η αρχή λειτουργίας του υδραυλικού πιεστηρίου είναι η εξής:

Ο χώρος μετα-ξύ των δύο εμβόλων 1 και 2 (Σχήμα 23-1) περιέχει ένα υγρό συμπίεσης (συνήθως ένα ειδικό έλαιο). Η επιφάνεια S_1 του εμ-βόλου 1 είναι μικρή συγκρινόμενη με την επιφάνεια S_2 του εμβόλου 2. Για να ισορ-ροπήσουμε τη δύναμη F_2, που ασκείται στο έμβολο 2, πρέπει να ασκήσουμε στο έμ-βολο 1 μια δύναμη F_1, τέτοια ώστε οι πιέσεις p_1 και p_2 να είναι ίσες. Οι πιέσεις αυτές είναι



23 – 1

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

(23-1)

$$p_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

(23-2)

Στην κατάσταση ισορροπίας $p_1 = p_2$ ισχύει επομένως:

$$\boxed{\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}}$$

(23-3)

Επειδή $S_1 < S_2$ είναι και $F_1 < F_2$

Αν λειτουργήσουμε το υδραυλικό πιεστήριο κατά την ανάστροφη φορά, τότε θα πρέπει να ασκήσουμε πολύ μεγάλη δύναμη για να αντισταθμίσουμε μια μικρή. Το φαινόμενο αυτό το παρατηρούμε, όταν θέλουμε να προωθήσουμε ένα παχύρευστο υγρό μέσα σε μια στένωση.

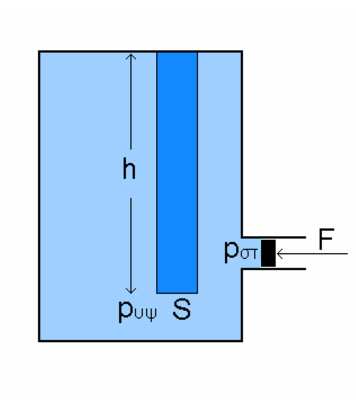
2.2.2 Υδροστατική πίεση

Το δοχείο του σχήματος 24-1 είναι πλήρες με υγρό πυκνότητας ρ. Μέσω του εμβόλου ασκείται στο υγρό η πίεση $p_{\sigma\tau}$. Η πίεση αυτή λέγεται **στατική πίεση** και μεταφέρεται σύμφωνα με την αρχή του Pascal σε όλη την έκταση του υγρού.

Σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια ασκείται πέραν της στατικής πίεσης και μια επί πλέον πίεση $p_{\upsilon\psi}$ λόγω του βάρους του υπερκείμενου υγρού. Η πίεση αυτή είναι η **υψομετρική πίεση.** Η υψομετρική πίεση υπολογίζεται ως εξής:

Θεωρούμε την οριζόντια επιφάνεια S και την υπερκείμενη στήλη του υγρού. (Στο σχήμα 24-1 αυτή η στήλη αντιστοιχεί στη βαθύτερα χρωματισμένη περιοχή). Το βάρος F_B, που δέχεται η επιφάνεια S είναι τότε:

$$F_B = h \cdot S \cdot \rho \cdot g \qquad (24\text{-}1)$$



24 – 1

οπότε η υψομετρική πίεση είναι:

$$p_{\upsilon\psi} = \frac{F_B}{S} = \frac{h \cdot S \cdot \rho \cdot g}{S}$$

δηλαδή:

υψομετρική πίεση $\boxed{p_{\upsilon\psi} = h \cdot S \cdot \rho \cdot g}$

(24-2)

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Η υψομετρική πίεση σε ένα σημείο του υγρού είναι ανάλογη του ύψους της υπερκείμενης στήλης και ανάλογη της πυκνότητας του υγρού

Η ολική πίεση $p_{υδρ}$ είναι ίση προς το άθροισμα των δύο μερικών πιέσεων, δη-λαδή της στατικής πίεσης $p_{στ}$ και της υψομετρικής πίεσης $p_{υψ}$, και λέγεται **υδροστα-τική πίεση**. Δηλαδή:

υδροστατική πίεση $\boxed{p_{υδρ} = p_{στ} + \rho \cdot g \cdot h}$ (24-3)

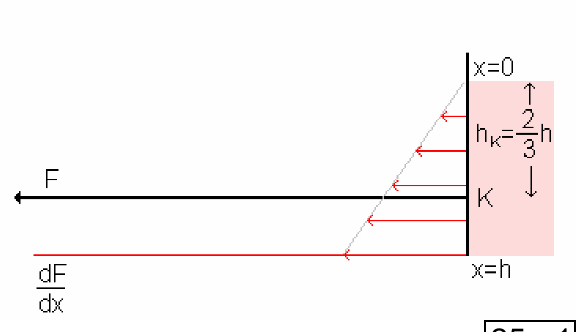
Σε υγρά με ελεύθερη επιφάνεια η στατική πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική $p_{ατμ}$. Σε βάθος h η υδροστατική πίεση είναι επομένως:

$$p = p_{ατμ} + \rho \cdot g \cdot h \quad (24\text{-}4)$$

Η ολική πίεση, που ασκείται στα τοιχώματα του δοχείου, όπου περιέχεται το υγρό, είναι ίση προς τη διαφορά της εξωτερικής από την εσωτερική (υδροστατική) πίεση, επομένως η ολική πίεση, που ασκείται στα τοιχώματα του δοχείου, είναι ίση προς την υψομετρική πίεση. Έτσι η πίεση στα τοιχώματα του δοχείου σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού είναι:

πίεση στα τοιχώματα δοχείου $\boxed{p = \rho \cdot g \cdot h}$ (24-5)

Στα κατακόρυφα τοιχώματα των δεξαμενών, ή των φραγμάτων η υδρο-στατική πίεση αυξάνει γραμμική συναρ-τήσει του βάθους. Στο σχήμα 25-1 εικονί-ζεται η **κατανομή των δυνάμεων**, δηλα-δή η δύναμη που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας στο κατακόρυφο τοίχωμα μιας δεξαμενής. Παρατηρούμε ότι στα μεγαλύτερα βάθη ασκούνται αναλογικά μεγαλύτερες δυνάμεις. Αυτός είναι ο λόγος, που έχουν τα φράγματα μεγαλύτερο πάχος στη βάση τους.



25 – 1

Η συνισταμένη δύναμη F διέρχεται από το **κέντρο βάρους** Κ του σχηματιζόμενου τριγώνου. Όπως γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία, το σημείο αυτό βρίσκεται στα 2/3 των διαμέσων του τριγώνου, επομένως στην προκειμένη περίπτωση βρίσκεται σε βάθος ίσο προς τα 2/3 του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας.

2.2.3 Ατμοσφαιρική πίεση. Το πείραμα του Torricelli

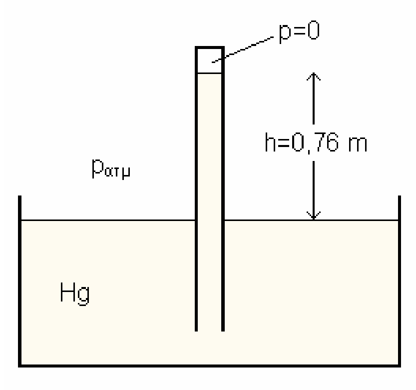
Η Γη περιβάλλεται από αέρα, ο οποίος αποτελείται κατά κύριο λόγο από Άζωτο και Οξυγόνο σε αναλογία 4:1. Τα υπόλοιπα συστατικά του ατμοσφαιρικού αέρα περιέχονται συνολικά σε ποσοστό περίπου 1%.

Ο ατμοσφαιρικός αέρας ασκεί με το βάρος του μια πίεση, η οποία είναι γνωστή ως **ατμοσφαιρική πίεση**. Η τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται σύμφωνα με τις μετεωρολογικές συνθήκες. Στην επιφάνεια της θάλασσας και σε κανονικές συνθήκες θερμοκρασίας ($0^{o}C$) η συνήθης τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης είναι

κανονική πίεση $\boxed{p_n = 1{,}013\,\text{bar} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{Pa}}$

(25-1)

Πειραματικά η ύπαρξη ατμοσφαιρικής πίεσης αποδείχθηκε από τον Evangelista **Torricelli** (1608-1647, Ιταλός Φυσικός και Μαθηματικός, εφευρέτης του βαρομέτρου). Ο Torricelli βύθισε ανεστραμμένο σωλήνα με υδράργυρο σε δοχείο, που περιείχε υδράργυρο επίσης (Σχήμα 25-1). Στο σωλήνα παρ-έμεινε τότε στήλη υδραργύρου ύψους 0,76 cm. Αυτό οφείλεται στην ατμοσφαιρική πίεση, που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού του δοχείου. Επειδή υπεράνω της στήλης υδραργύρου στο σωλήνα πρακτικά υπάρχει κενό (p=0) στην κατάσταση ισορροπίας ισχύει:



$\boxed{25-1}$

ατμοσφαιρική πίεση = υψομετρική πίεση στήλης

επομένως:

$p_{\alpha\tau\mu} = \rho \cdot g \cdot h$

(26.1)

Θέτουμε στην εξίσωση 26.1 τις τιμές:

$\rho = 13{,}59 \cdot 10^3\ kg/m^3$ = πυκνότητα του υδραργύρου σε θερμοκρασία 0 ^oC

$g = 9{,}81 m/s^2$ = επιτάχυνση της βαρύτητας

$h = 0{,}76 m$ = ύψος υδραργυρικής στήλης

και λαμβάνουμε την τιμή της κανονικής ατμοσφαιρικής πίεσης:

$$p_n = 13{,}6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}76 m \cong 1{,}013 \cdot 10^5 Pa = 1{,}013 bar$$

Επειδή ο ατμοσφαιρικός αέρας είναι συμπιεστό ρευστό και οι υπερκείμενες μάζες ασκούν πίεση στις υποκείμενες, οι οποίες συμπιέζονται έτσι περισσότερο, η πυκνότητα ρ του ατμοσφαιρικού αέρα μειώνεται συναρτήσει του ύψους.

Ο υπολογισμός της ατμοσφαιρικής πίεσης συναρτήσει του υψομέτρου γίνεται με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού λογισμού και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι:

Η ατμοσφαιρική πίεση μειώνεται εκθετικά συναρτήσει του υψομέτρου.

Η εξίσωση, που μας δίνει την ατμοσφαιρική πίεση συναρτήσει του υψομέτρου λέγεται **βαρομετρικός τύπος** και είναι:

βαρομετρικός τύπος $\boxed{p(h) = 1{,}013 \cdot e^{-\frac{h}{8083}}}$

(26-2)

όπου: $h =$ υψόμετρο σε m.

$p(h) =$ ατμοσφαιρική πίεση σε υψόμετρο h σε bar

Από το βαρομετρικό τύπο μπορούμε να βρούμε λύνοντας ως προς το υψόμετρο h, ότι η ατμοσφαιρική πίεση υποδιπλασιάζεται σε ύψος 5,6 km από την επιφάνεια της θάλασσας.

2.3 Τα ρευστά σε κίνηση

2.3.1 Ροή. Ο νόμος της συνεχείας

Η **ροή** είναι πρωταρχική έννοια και σημαίνει την αδιάκοπη κίνηση ενός ρευστού προς μια κατεύθυνση. Η ροή σχηματίζει μια κατά το μάλλον, ή ήττον μόνιμη εικόνα. Αυτή την αίσθηση της μόνιμης κατάστασης την έχουμε όταν ατενίζουμε π.χ. ένα ποτάμι. Η εικόνα μπροστά μας παραμένει σχεδόν η ίδια, όμως γνωρίζουμε στην πραγματικότητα ότι νέες ποσότητες νερού αντικαθιστούν συνεχώς τις προηγούμενες, οι οποίες προωθούνται προς τα εμπρός.

Η μελέτη των νόμων της ροής είναι αντικείμενο της **Υδροδυναμικής** και έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε πολλές τεχνολογικές κατευθύνσεις. Η Υδραυλική είναι η πιο προφανής, όμως πρέπει να σημειώσουμε ότι η γνώση των βασικών νόμων ροής μέσα στους σωλήνες οφείλεται στο Γάλλο Ιατρό **M. Poiseille** (1799-1869), ο οποίος μελέτησε τη ροή του αίματος στις αρτηρίες.

Ποσοτικά η ροή εκφράζεται από την **παροχή.** Η παροχή μας δίνει την ποσότητα του ρευστού, που διέρχεται στη μονάδα του χρόνου μέσω ενός αγωγού, π.χ. ενός σωλήνα, ενός αεραγωγού κ.λ.π.

Αν η μετρούμενη ποσότητα είναι όγκος, τότε λαμβάνουμε την

παροχή σε όγκο $\boxed{\dot{V} = \frac{dV}{dt}}$ σε $\frac{m^3}{s}$, ή $\frac{l}{s}$

(27-1)

Αν η μετρούμενη ποσότητα είναι μάζα, τότε λαμβάνουμε την

παροχή σε μάζα $\boxed{\dot{m} = \frac{dm}{dt}}$ σε $\frac{kg}{s}$

(27-2)

Επειδή $m = \rho \cdot V \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \rho \cdot \frac{dV}{dt}$ βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{\dot{m} = \rho \cdot \dot{V}}$$

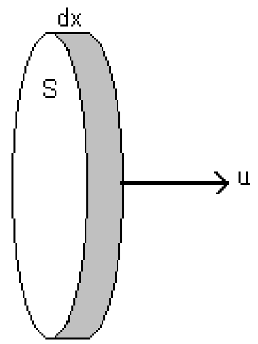
(27-3)

Συνήθως η παροχή εκφράζεται συναρτήσει της ταχύτητας u του ρευστού και της διατομής S του αγωγού μέσα στον οποίο γίνεται η ροή. Βρίσκουμε τον όγκο dV του ρευστού, που διέρχεται από τη διατομή εμβαδού S στο στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt. Στο σχήμα 28-1 ο όγκος αυτός εκπροσωπείται από το γραμμοσκιασμένο κύλινδρο ύψους:

$$dx = u \cdot dt \qquad (27\text{-}4)$$

Επομένως:

$$dV = S \cdot dx = S \cdot u \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = S \cdot u \qquad (28\text{-}1)$$



28 – 1

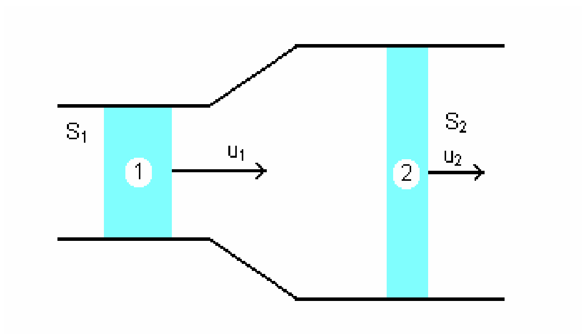
Λαμβάνουμε έτσι την παροχή σε όγκο συναρτήσει της ταχύτητας ροής και της διατομής:

παροχή σε όγκο $\boxed{\dot{V} = S \cdot u}$ (28-2)

και την αντίστοιχη σχέση για την παροχή σε μάζα:

παροχή σε μάζα $\boxed{\dot{m} = \rho \cdot S \cdot u}$ (28-3)

Στο σχήμα 28-2 εικονίζεται ένας αγωγός μεταβλητής διατομής, μέσα στον οποίο πραγματοποιείται η ροή ενός ρευστού. Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν σημεία από τα οποία να εισρέει, ή να εκρέει ρευστό, οπότε όση ποσότητα ρευστού εισέρχεται από τη διατομή 1, πρέπει να εξέρχεται από τη διατομή 2 σχήμα 28-2). Η παροχή σε μάζα είναι επομένως σταθερή. Η πρόταση αυτή εκφράζει το **νόμο της συνεχείας**, ο οποίος σύμφωνα με την εξίσωση 28-3 διατυπώνεται ως εξής:



28 – 2

νόμος συνεχείας $\boxed{\rho_1 \cdot u_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot S_2}$

(28-4)

Αν το ρευστό είναι επί πλέον ασυμπίεστο $(\rho_1 = \rho_2)$, τότε ο νόμος της συνεχείας απλουστεύεται στη μορφή

νόμος της συνεχείας στα ασυμπίεστα ρευστά $\boxed{u_1 \cdot S_1 = u_2 \cdot S_2}$

(28-5)

Επομένως:

Στα ασυμπίεστα ρευστά οι ταχύτητες ροής είναι αντιστρόφως ανάλογες των διατομών του αγωγού εντός του οποίου γίνεται η ροή.

Παράδειγμα 2-1

Στο σημείο σύνδεσης δύο σωλήνων ποτίσματος με διάμετρο (εσωτερική) $d_1 = 3\,cm$ σχηματίζεται στένωση διαμέτρου $d_2 = 1{,}5\,cm$. Η παροχή σε όγκο είναι $\dot{V} = 22l/min$. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες ροής: α) στους σωλήνες, β) στη στένωση.

Λύση:

Υπολογίζουμε τα εμβαδά των δύο διατομών

$$S_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{2} = \frac{\pi \cdot (3\,cm)^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0{,}03\,m)^2}{4} = 7{,}069 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{2} = \frac{\pi \cdot (1{,}5\,cm)^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0{,}015\,m)^2}{4} = 1{,}767 \cdot 10^{-4}\,m^2$$

α)

$$\dot{V} = u_1 \cdot S_1 \Rightarrow u_1 = \frac{\dot{V}}{S_1} = \frac{22\frac{l}{min}}{7{,}069 \cdot 10^{-4}\,m^2} = \frac{22\frac{10^{-3}m^3}{60\,s}}{7{,}069 \cdot 10^{-4}\,m^2} = \frac{3{,}667 \cdot 10^{-4}\,\frac{m^3}{s}}{7{,}069 \cdot 10^{-4}\,m^2}$$

$$u_1 = 0{,}519\frac{m}{s}$$

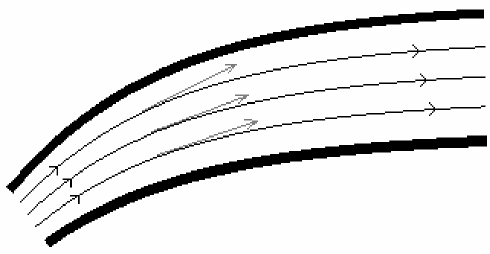
β) Το νερό είναι πρακτικά ασυμπίεστο, επομένως (εξίσωση 29.2):

$$u_1 \cdot S_1 = u_2 \cdot S_2 \Rightarrow u_2 = \frac{S_1}{S_2} \cdot u_1 = \frac{7{,}069 \cdot 10^{-4}\,m^2}{1{,}767 \cdot 10^{-4}\,m^2} \cdot 0{,}519\frac{m}{s}$$

$$u_1 = 2{,}075\frac{m}{s}$$

2.3.2 Πεδίο ροής. Ρευματικές γραμμές

Για να περιγράψουμε τη ροή ενός ρευστού σημειώνουμε συνήθως την ταχύτητά του σε διάφορα σημεία του χώρου. Το μέγεθος, που λαμβάνουμε υπ' όψη στη μελέτη της κίνησης των ρευστών είναι επομένως η ταχύτητα u(r) σε κάθε σημείο r του χώρου. Εισάγουμε έτσι ένα διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων, που είναι το **πεδίο ροής** του ρευστού. Το πεδίο ροής απεικονίζεται με τις **ρευματικές γραμμές**. Οι ρευματικές γραμμές είναι συνεχείς καμπύλες, οι οποίες σε κάθε



29 – 1

σημείο του πεδίου ροής είναι εφαπτόμενες στο διάνυσμα της ταχύτητας όπως στο σχήμα 29-1. Παρατηρούμε ότι στα στενότερα σημεία του αγωγού οι ρευματικές γραμμές είναι πυκνότερες. Όπως γνωρίσαμε όμως ήδη από το νόμο της συνεχείας, η ταχύτητα ροής είναι αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του αγωγού. Επομένως:

Οι ρευματικές γραμμές απεικονίζουν το πεδίο ροής. Οι ρευματικές γραμμές είναι συνεχείς καμπύλες εφαπτόμενες στο διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού. Όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα των ρευματικών γραμμών, τόσο μεγαλύτερη είναι και η ταχύτητα ροής.

2.3.3 Στρωτή και τυρβώδης ροή

Διακρίνουμε δύο είδη ροής. Στο πρώτο η ταχύτητα σε κάθε σημείο του πεδίου ροής είναι χρονικά αμετάβλητη, επομένως και οι ρευματικές γραμμές έχουν σταθερό σχήμα και διατρέχουν το πεδίο ροής ομαλά η μία δίπλα στην άλλη. Αυτή είναι η **στρωτή ροή**. Κατά κανόνα η στρωτή ροή χαρακτηρίζεται από χαμηλές ταχύτητες.

Όταν αυξηθεί η ταχύτητα του ρευστού, τότε η ροή παύει να είναι μόνιμη. Η ταχύτητα μεταβάλλεται χρονικά γύρω από μια μέση τιμή σε ένα σημείο του πεδίου, και όταν υπερβεί ένα όριο, τότε μεταπίπτει σε **τυρβώδη**. Στην τυρβώδη ροή δημιουργούνται στρόβιλοι, δηλαδή το ρευστό κυκλοφορεί σε κλειστές τροχιές. Χαρακτηριστικό της τυρβώδους ροής είναι οι δίνες.

Η ποιοτική διαφορά μεταξύ της στρωτής και της τυρβώδους ροής συνίσταται στους διαφορετικούς νόμους, που ακολουθούν οι αντιστάσεις στη ροή, όταν μεταβαίνουμε από το ένα είδος ροής στο άλλο και σημειώνουμε ότι:

Στη στρωτή ροή οι απώλειες είναι ανάλογες της ταχύτητας, ενώ στην τυρβώ-δη ανάλογες του τετραγώνου της ταχύτητας.

2.3.4 Νόμος Bernoulli. Η βασική εξίσωση της ροής

Εξετάζουμε ως προς την ενέργεια τη ροή ενός **ιδανικού ρευστού**, δηλαδή ενός ρευστού χωρίς εσωτερικές τριβές, ή τριβές με τα τοιχώματα του αγωγού εντός του οποίου γίνεται η ροή. Θεωρούμε την ποσότητα του ρευστού μεταξύ δύο επιφανειών κάθετων στη ροή στα σημεία 1 και 2 (Σχήμα 31-1).

Μετά ένα στοιχειώδες χρονικό διάστημα οι δύο τερματικές επιφάνειες μετατοπίζονται εξ αιτίας της ροής κατά dx_1 και dx_2 στα σημεία 1΄ και 2΄. Αν οι στατικές πιέσεις ένθεν και ένθεν της θεωρούμενης ποσότητας είναι οι p_1 και p_2, τότε στις δύο τερματικές επιφάνειες ασκούνται οι δυνάμεις $F_1 = p_1 \cdot S_1$ και $F_2 = p_2 \cdot S_2$ αντίστοιχα. Οι δυνάμεις αυτές παράγουν μηχανικό έργο ίσο προς:

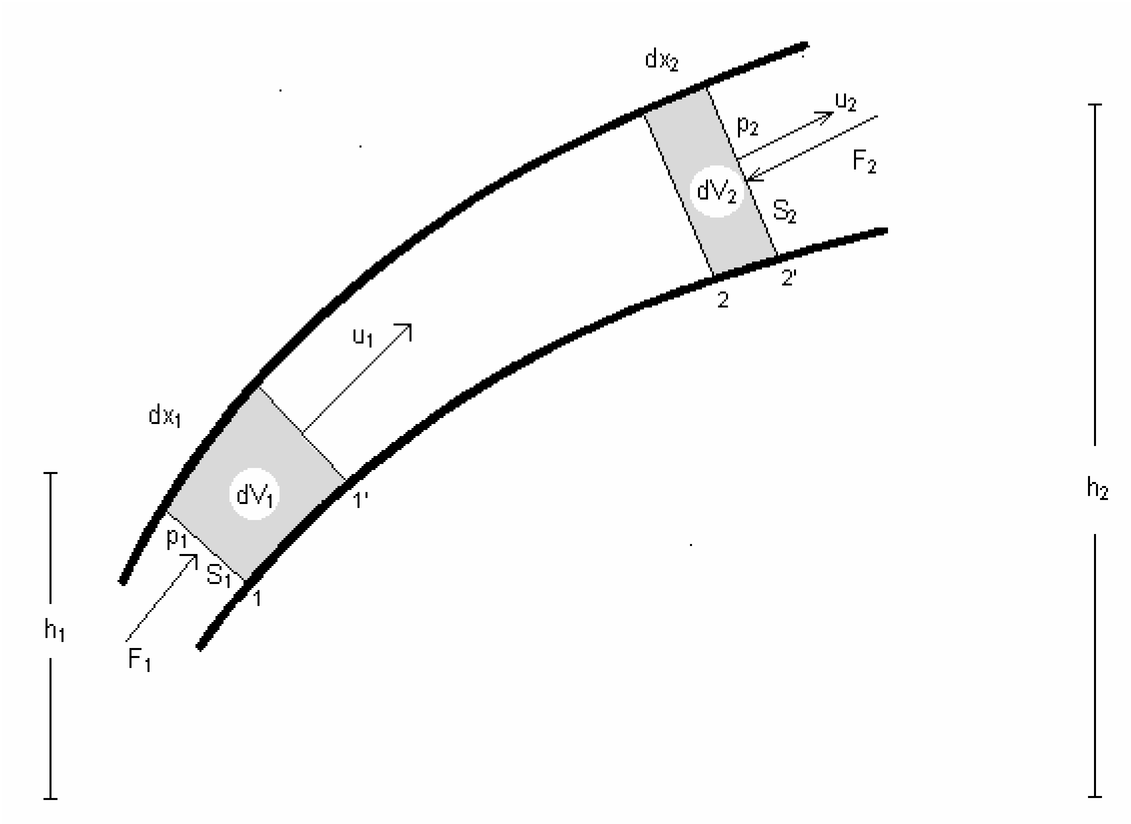
$$dW = F_1 \cdot dx_1 - F_2 \cdot dx_2 = p_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot dx_2 = p_1 \cdot dV_1 - p_2 \cdot dV_2 \qquad (31\text{-}1)$$

Η εξίσωση (31-1) ισχύει και για συμπιεστά ρευστά ($dV_1 \neq dV_2$). Αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο, τότε $dV_1 = dV_2$.

Το έργο dW είναι ίσο προς τη μεταβολή dE της μηχανικής ενέργειας της θεωρούμενης ποσότητας του ρευστού. Επειδή η ενέργεια της ποσότητας του ρευστού μεταξύ των σημείων 1΄ και 2 παραμένει αμετάβλητη, η ολική μεταβολή dE είναι ίση προς τη διαφορά της ενέργειας της ποσότητας στην περιοχή μεταξύ των σημείων 2 και 2΄ μείον την ενέργεια της ποσότητας στην περιοχή μεταξύ των σημείων 1 και 1΄. Δηλαδή:

$$dE = dm \cdot g \cdot h_2 - dm \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot dm \cdot u_2^2 - \frac{1}{2} \cdot dm \cdot u_1^2 \qquad (31\text{-}2)$$

όπου dm είναι η μάζα, που περιέχεται σε κάθε μια από τις δύο περιοχές. (Προφανώς οι δύο περιοχές περιέχουν ίσες μάζες ρευστού).



$\boxed{31-1}$

Επειδή $dW = dE$,

$$p_1 \cdot dV_1 + dm \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot dm \cdot {u_1}^2 = p_1 \cdot dV_2 + dm \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} \cdot dm \cdot {u_2}^2$$

(31-3)

Η εξίσωση αυτή ισχύει για δύο τυχόντα σημεία, επομένως ισχύει και γα κάθε στοιχειώδη ποσότητα του ρευστού. Προκύπτει έτσι ο

νόμος Bernoulli για τις ενέργειες $\boxed{p \cdot dV + dm \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot dm \cdot u^2 = \sigma\tau\alpha\theta}$

(32-1)

Διαιρούμε την εξίσωση (32-1) με το στοιχειώδη όγκο dV. Οι όροι της νέας εξίσωσης έχουν τότε διαστάσεις πίεσης. Προκύπτει έτσι ο

νόμος Bernoulli για τις πιέσεις $\boxed{p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2 = \sigma\tau\alpha\theta}$

(32-2)

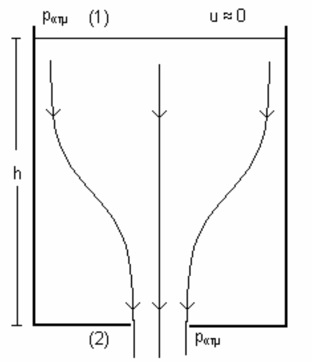
Στην εξίσωση (32-2) ο πρώτος όρος είναι η στατική πίεση και ο δεύτερος η υψομετρική πίεση (παράγραφος 2.2.2). Ο τρίτος όρος λέγεται **δυναμική πίεση**.

Έχουμε λοιπόν:

Στα ρευστά το άθροισμα της στατικής της υψομετρικής και της δυναμικής πίεσης είναι σταθερό.

Ο νόμος του Bernoulli (Daniel **Bernoulli**, 1700-1782, Ελβετός Μαθηματικός και Φυσικός) είναι ο βασικός νόμος της Υδροδυναμικής και της Αεροδυναμικής και στις τρεις διατυπώσεις του. Αν και είναι διατυπωμένος για **ιδανικά ρευστά**, εν τούτοις έχει μεγάλη πρακτική σημασία στις τεχνικές εφαρμογές.

<u>*Εφαρμογή*</u> *1: (Μέτρηση ταχύτητας εκροής από οπή)* Θεωρούμε ότι η στάθμη κατέρχεται πολύ αργά (. Εφαρμό-ζουμε το νόμο του Bernoulli για τις πιέσεις (εξίσωση 32-3, σχήμα 33-1) στα σημεία (1) και (2):



$\boxed{32-1}$

$$p_{ατμ} + \rho \cdot g \cdot h + 0 = p_{ατμ} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2$$

όπου οι όροι στο αριστερό αφορούν το σημείο (1) και στο δεξιό το σημείο (2). Λύνουμε ως προς u και βρίσκουμε

ταχύτητα εκροής από οπή $\boxed{u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$

(32-3)

Παράδειγμα 2-2

Βυτίο περιέχει νερό σε ύψος $h = 0{,}6\,m$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής u από την οπή του πυθμένα και η παροχή $\dot{V}$ σε l/s. Να θεωρήσετε ότι η στάθμη της επιφάνειας του νερού κατέρχεται πολύ αργά. Δίνονται: Εμβαδόν οπής $S = 3\,cm^2$, επιτάχυνση βαρύτητας $g = 9{,}81 m/s^2$.

Λύση:

Εξίσωση 32-3: $u = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}6\,m} = \sqrt{11{,}772 \frac{m^2}{s^2}}$

$$u = 3{,}431 \frac{m}{s}$$

$$\dot{V} = S \cdot u = 3\,cm^2 \cdot 3{,}431\frac{m}{s} = 3 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 3{,}431\frac{m}{s} = 1{,}093\frac{m^3}{s}$$

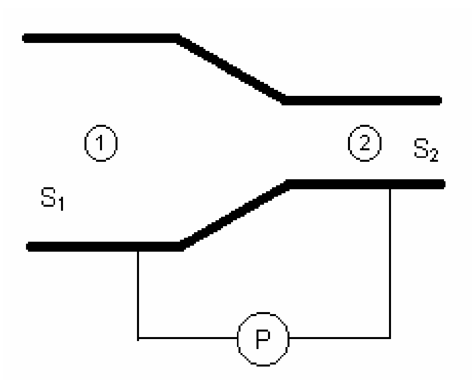
$$\dot{V} = 1{,}093\frac{l}{s}$$

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι ο τύπος, που μας δίνει την ταχύτητα εκροής είναι ίδιος με εκείνον της ταχύτητας για την ελεύθερη πτώση. Η ταχύτητα, που υπολογίσαμε αναφέρεται σε ένα ιδανικό υγρό, δηλαδή σε ένα υγρό χωρίς εσωτερικές τριβές, ή τριβές με τα τοιχώματα του δοχείου. Στα πραγματικά υγρά η ταχύτητα εκροής είναι μικρότερη και εξαρτάται εκτός από το συντελεστή εσωτερικών τριβών και από το σχήμα της οπής εκροής. Η πραγματική ταχύτητα εκροής υπολογίζεται μέσω του **αριθμού εκροής** μ από την εξίσωση:

$$\boxed{u = \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$

Ο αριθμός εκροής είναι αδιάστατος και υπολογίζεται πειραματικά. Παράδειγμα: για κυκλική οπή με λεία στρογγυλεμένα χείλη είναι $\mu = 0{,}98$. Για μια απλή κυκλική οπή είναι $\mu = 0{,}75$.

*<u>Εφαρμογή</u> 2: (Μέτρηση παροχής με το μετρητή **Venturi**).* Στο σχήμα 33-1 εικονίζεται ένας σωλήνας με στένωση. Στο στενότερο μέρος η ταχύτητα ροής- επομένως και η δυναμική πίεση- είναι μεγαλύτερη, των αντίστοιχών τους στο ευρύτερο. Επειδή η υψομετρικές πιέσεις στα δύο μέρη είναι ίσες, από την εξίσωση του Bernoulli για τις πιέσεις (εξίσωση 32-3) προκύπτει ότι η στατική πίεση στο ευρύτερο τμήμα είναι μεγαλύτερη εκείνης στο αριστερό. Από την ένδειξη του μανομέτρου, που μετράει τη διαφορά των στατικών πιέσεων βρίσκουμε την παροχή ως εξής: Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για τις πιέσεις στα σημεία 1 και 2



33 – 1

$$p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_1^2 = p_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_1^2$$

Από το νόμο της συνεχείας έχουμε:

$$\dot{V} = S_1 \cdot u_1 = S_2 \cdot u_2 \qquad \Rightarrow \qquad u_1 = \frac{\dot{V}}{S_1} \text{ και } u_2 = \frac{\dot{V}}{S_2} \qquad \Rightarrow$$

$$p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\left(u_2^2 - u_1^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\rho\cdot\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)\cdot\dot{V}$$

Επομένως:

τύπος μετρητή Venturi

$$\boxed{\dot{V} = \sqrt{\frac{2}{\rho\cdot\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right)}}\cdot\sqrt{p}}$$

(34-1)

Παράδειγμα 2-3

Για τον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος 33-1 δίνονται: $S_1 = 0{,}04\,m^2$, $S_2 = 0{,}0025\,m^2$. Η ένδειξη του μανομέτρου είναι $p = 0{,}43\,bar$. Το ρευστό είναι νερό. Να υπολογιστεί η παροχή σε όγκο.

Λύση:

Από την εξίσωση 34-1 βρίσκουμε:

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2}{1000\frac{kg}{m^3}\cdot\left(\frac{1}{\left(0{,}0025m^2\right)^2} - \frac{1}{\left(0{,}04m^2\right)^2}\right)}}\cdot\sqrt{0{,}43bar} =$$

$$= 1{,}120\cdot 10^{-4}\left(\frac{1}{kg/m^7}\right)^{1/2}\cdot\sqrt{43000Pa} = 1{,}120\cdot 10^{-4}\left(\frac{m^7}{kg}\right)^{1/2}\cdot\sqrt{43000\frac{kg}{s^2\cdot m}} =$$

$$= 1{,}120\cdot 10^{-4}\left(\frac{m^7}{kg}\right)^{1/2}\cdot 207{,}4\left(\frac{kg}{s^2\cdot m}\right)^{1/2} = 0{,}0232\left(\frac{m^6}{s^2}\right) = 0{,}0232\frac{m^3}{s}$$

$$\dot{V} = 23{,}2\frac{l}{s}$$

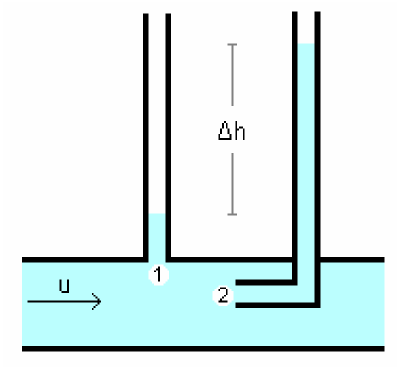
---

*<u>Εφαρμογή</u> 3: (Μέτρηση παροχής με το σωλήνα **Pitot**)* Ο σωλήνας Pitot αποτε-λείται από έναν οριζόντιο και δύο κατακόρυφους σωλήνες όπως στο σχήμα 35-1. Στο σημείο (1) η ταχύτητα ροής είναι ίση με εκείνη του ρευστού (u). Αντίθετα στο σημείο (2) η ροή ανακόπτεται εξ αιτίας του παρεμβαλλόμενου σωλήνα επομένως $u = 0$. Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli στα σημεία (1) και (2) για τα ύψη:

$$\frac{p_1}{\rho\cdot g} + \frac{u^2}{2\cdot g} = \frac{p_2}{\rho\cdot g} + 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{p_2}{\rho\cdot g} - \frac{p_1}{\rho\cdot g} = \frac{u^2}{2\cdot g}$$

Η διαφορά του στατικού ύψους μεταξύ των σημείων (1) και (2) είναι ίση με τη διαφορά του υψομετρικού ύψους Δh στους δύο σωλήνες, επομένως:

$$\Delta h = \frac{u^2}{2 \cdot g} \qquad \text{και} \quad u = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$



$\boxed{35-1}$

Από το εμβαδόν S του οριζόντιου σωλήνα και την ταχύτητα u βρίσκουμε την παροχή σε όγκο:

τύπος παροχής με το σωλήνα Pitot $\boxed{\dot{V} = S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}}$ (35-1)

2-1 Να υπολογίσετε σε bar την πίεση, που απαιτείται για να συμπιέσουμε το νερό κατά 10%. Η συμπιεστότητα του νερού είναι $\kappa = 5 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}$.

2-2 Στις προδιαγραφές ενός υλικού αναφέρεται ότι η πίεση με την οποία πρέπει να το συμπιέσουμε για να διαμορφωθεί είναι 100 PSI. Πόσα bar αντιστοιχούν;

2-3 Τι είναι η υδροστατική πίεση;

2-4 Τι είναι η κανονική ατμοσφαιρική πίεση;

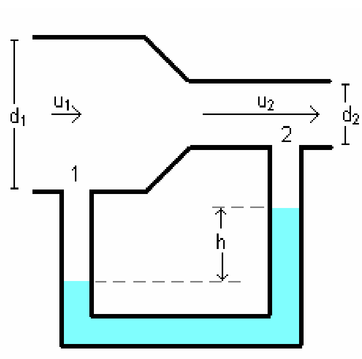
2-5 Το υψόμετρο στην κορυφή του Ολύμπου είναι $h = 2914\,m$. Πόση είναι η ατμοσφαιρική πίεση εκεί;

2-6 Η ταχύτητα ροής σε ένα σωλήνα είναι $u = 0{,}83\,m/s$. Η διάμετρος του σωλήνα είναι $d = 14\,mm$. Να βρεθεί η παροχή σε l/s.

2-7 Για ποια ρευστά ισχύει ο νόμος του Bernoulli;

2-8 Σε ποια αρχή βασίζεται ο νόμος του Bernoulli;

2-9 Η παροχή σε όγκο του ατμοσφαιρικού αέρα (πυκνότητα $\rho_\alpha = 1{,}2 kg/m^3$) μέσα στο σωλήνα του σχήματος είναι $\dot{V} = 7 l/s$. Οι διαστάσεις είναι: $d_1 = 5\,cm$ και $d_2 = 3\,cm$. Να υπολογίσετε τη διαφορά στάθμης του νερού στο σωλήνα. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}81 m/s^2$.



2-10 Η διάταξη του σχήματος χρησιμοποιείται για την αναρρόφηση και απομάκρυνση ακαθάρτων υδάτων. α) Να εξηγήσετε, πώς επιτυγχάνεται. β) Το νερό εισέρχεται στο σωλήνα από το σημείο 1 με πίεση $p_1 = 1{,}6\,bar$. Η παροχή σε όγκο είναι $\dot{V} = 0{,}030\,m^3/s$. Οι διάμετροι είναι: $d_1 = 0{,}2\,m$ και $d_2 = 0{,}05\,m$. Να υπολογίσετε το μέγιστο βάθος h, από το οποίο μπορούμε να αντλήσουμε νερό. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 9{,}81\,m/s^2$.