

Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

Θεωρήστε ότι ο X είναι γραμμικός χώρος επί του σώματος των πραγματικών αριθμών.

1. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι αν $(x_n), (y_n)$ είναι ακολουθίες στο χώρο αυτό τ.ω. $x_n \rightarrow 0$ και (y_n) να είναι φραγμένη, τότε $(x_n, y_n) \rightarrow 0$.
2. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι $|(x, y)| = \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)} \Leftrightarrow$ τα x, y είναι γραμμ. εξαρτημένα.
3. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Δείξτε ότι αν $(x, u) = (x, v) \forall x \in X$, τότε $u = v$.
4. (i) Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \alpha x = \beta y$, για $\alpha, \beta \geq 0$ όχι ταυτόχρονα μηδέν.
(ii) $\|x - y\| + \|y - z\| = \|x - z\| \Leftrightarrow y = \alpha x + (1 - \alpha)z, \alpha \in [0, 1]$.
(iii) $\|x - y\| = |\|x\| - \|y\|| \Leftrightarrow \alpha x = \beta y$, για $\alpha, \beta \geq 0$ όχι ταυτόχρονα μηδέν.
5. Δείξτε ότι αν (x_n) ακολουθία σ' ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(X, (\cdot, \cdot))$ με $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ και $(x_n, x) \rightarrow (x, x)$, τότε $x_n \rightarrow x$.
6. Θεωρήστε στο χώρο \mathbb{R}^2 τη νόρμα $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Η νόρμα $\|\cdot\|_1$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο;
7. Δείξτε ότι αν $(X, (\cdot, \cdot))$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε $x \perp y \Leftrightarrow \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
8. Δείξτε ότι αν $(X, (\cdot, \cdot))$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε $x \perp y \Leftrightarrow \|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
9. Δείξτε ότι αν $(X, (\cdot, \cdot))$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $(x_n) \subset X$ ακολουθία στον X με $x_n \rightarrow x$ και $y \in X$ τ.ω. $y \perp x_n \forall n$, τότε $y \perp x$.
10. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ η αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα. Είναι η νόρμα αυτή αυστηρά κυρτή;