

## 3η Εργαστηριακή Άσκηση

1. Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς

$$u_t + 2u_x = 0, \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T_f] \quad (1)$$

με αρχική συνθήκη

$$u(0, x) = u_0(x) = e^{-\beta \left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2}$$

και περιοδικές συνθήκες στα άκρα. Γράψτε δύο προγράμματα που να υλοποιούν τις μεθόδους upwind και Lax-Wendroff, αντίστοιχα. Θεωρήστε ομοιόμορφο διαμερισμό με χρονικό βήμα  $\tau := T_f/N_t$  για το διάστημα  $[0, T_f]$  (δηλ.  $t_n = (n-1)\tau$ ,  $n = 1, 2, \dots, N_t + 1$ ), και ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα  $h := (b-a)/N_x$  για το διάστημα  $[a, b]$  (δηλ.  $x_i = a + (i-1)h$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_x + 1$ ). Τα προγράμματά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζουν και να εκτυπώνουν στην οθόνη το σφάλμα της μεθόδου στην τελευταία χρονική στιγμή, δηλ. το  $\max_{1 \leq i \leq N_x+1} |U_i^{N_t+1} - u(T_f, x_i)|$ .

- (α') Δοκιμάστε τα πρόγραμμά σας για τα ακόλουθα δεδομένα:  $T_f = 1$ ,  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $\beta = 100$ .
- (β') Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης, καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς παίρνοντας τον αριθμό Courant  $\nu := \tau/h = 0.4$ . (Πάρτε π.χ.  $N_x = 40, 80, 160, 320$  και  $N_t = 100, 200, 400, 800$ , αντίστοιχα).
- (γ') Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της για  $t = T_f$  για καθεμιά από τις δύο μεθόδους.
- (δ') Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας των δύο μεθόδων.
- (ε') Δημιουργήστε ένα μικρό video που να παρουσιάζει την εξέλιξη στο χρόνο της ακριβούς και της υπολογιστικής λύσης για κάθε μια από τις δύο μεθόδους.
- (ς') Επαναλάβετε τα παραπάνω ερωτήματα παίρνοντας την τιμή της παραμέτρου  $\beta = 500$ . Τι παρατηρείτε;
- (ζ') Επαναλάβετε τα παραπάνω για διαφορετικές τιμές του  $\nu$ , και σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

2. Θεωρήστε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t + 2tx^2u_x = 0, & x \in [0, 2], \quad t \in [0, 1], \\ u(0, x) = u_0(x) = e^{-\beta \left(x - \frac{b-a}{2}\right)^2}, & x \in [0, 2], \\ u(t, 0) = 0, & t \in [0, 1], \end{cases} \quad (2)$$

Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης, καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς της αρεσκείας σας με τη μέθοδο upwind. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση (που πρέπει φυσικά να την υπολογίσετε) και τις προσεγγίσεις της, για  $t = T_f$ , καθώς και σε ενδιαμέσους χρόνους.