

## 2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας

$$\begin{cases} u_t(t, x) = u_{xx}(t, x), & x \in [a, b], \quad t \geq 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in [a, b] \\ u(t, a) = u(t, b) = 0, & \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Γράψτε δύο προγράμματα Matlab (ή Fortran ή C σε διπλή ακρίβεια) που να υλοποιούν την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο Crank-Nicolson για την επίλυση του προβλήματος για  $t \in [0, T_f]$ .

1. Θεωρήστε  $[a, b] = [0, 1]$  και  $u_0(x) := \sin(2\pi x)$ . Υπολογίστε την αναλυτική λύση του προβλήματος.
2. Για  $T_f = 1$  και για ομοιόμορφους διαμερισμούς της επιλογής σας υπολογίστε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος με τις δύο μεθόδους με τη βοήθεια των προγραμμάτων σας.
3. Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της στο χρόνο  $T_f = 1$  και σε ενδιάμεσες χρονικές στιγμές.
4. Υπολογίστε το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler με  $N_x = 20$  υποδιαστήματα του  $[0, 1]$  και  $N_t = 400$  χρονικά βήματα, στις χρονικές στιγμές  $t_n = n\tau$  (όπου  $\tau = T_f/N_t$ ), δηλ. την ποσότητα

$$E_{IE}^n := \max_{1 \leq i \leq N_x+1} |u_i^n - u(t_n, x_i)|$$

για  $n = 100, 200, 400$ . Επίσης, υπολογίστε το μέγιστο σφάλμα της προσέγγισης με τη μέθοδο Crank-Nicolson με  $N_x = 20$  υποδιαστήματα του  $[0, 1]$  και  $N_t = 20$  χρονικά βήματα, στις χρονικές στιγμές  $t_n = n\tau$ , δηλ. την ποσότητα

$$E_{CN}^n := \max_{1 \leq i \leq N_x+1} |u_i^n - u(t_n, x_i)|$$

για  $n = 5, 10, 20$ . Τι παρατηρείτε;

5. Βρείτε υπολογιστικά την τάξη ακρίβειας των δύο μεθόδων.
6. Επαναλάβετε τα προηγούμενα ερωτήματα για  $[a, b] = [0, 1]$  και  $u_0(x) := \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x, & x \in (1/2, 1] \end{cases}$ .

### ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Την Τετάρτη 3/11 κάθε ομάδα θα πρέπει να παραδώσει μια έκθεση (τυπωμένη κατά προτίμηση) στην οποία θα περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και πίνακες με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους. Η εξέταση θα γίνει την ίδια ημέρα στο εργαστήριο.