

Ασκήσεις - 2ο Φυλλάδιο

1. Αποδείξτε το Λήμμα 6.2 (σελ. 78) στις σημειώσεις του κ. Γεωργούλη.
2. Αποδείξτε το Θεώρημα 6.3 (σελ. 78) στις σημειώσεις του κ. Γεωργούλη.
3. Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς $u_t + au_x = 0$, με $a > 0$ σταθερό, όπου $0 < t < T_f$ και $x \in \mathbb{R}$, με αρχική συνθήκη $u(0, x) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ομοιόμορφα καταναμημένα σημεία στον άξονα των x και t_n , $n = 0, 1, \dots, N_t$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[0, T_f]$ με βήμα $\tau = \frac{T_f}{N_t}$.

(α') Δείξτε ότι αν προσεγγίσουμε τη χρονική παράγωγο με προς τα εμπρός διαφορά και τη χωρική παράγωγο με κεντρική διαφορά με βήμα $2h$, τότε η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της λύσης u στο σημείο (t_n, x_j) είναι

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\nu}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

όπου $\nu := \frac{\tau}{h}$ είναι ο αριθμός Courant. Χρησιμοποιήστε ανάλυση von Neumann για να αποδείξετε ότι η μέθοδος αυτή είναι ασταθής. Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό;

(β') Αν αντικαταστήσουμε στο παραπάνω σχήμα την τιμή U_j^n με τον μέσο όρο $\frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n)$, καταλήγουμε στο σχήμα Lax-Friedrichs:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{a\nu}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό; Μελετήστε την ευστάθεια της μεθόδου.

4. Θεωρήστε την εξίσωση μεταφοράς $u_t + \frac{1}{2}u_x = 0$, $0 \leq t \leq 4$, $0 \leq x \leq 4$, με αρχική συνθήκη

$$u(0, x) = u_0(x) = \begin{cases} 10x(2-x), & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$$

και συνοριακή συνθήκη $u(t, 0) = 0$, $0 \leq t \leq 4$.

- (α') Σχεδιάστε στιγμιότυπα της ακριβούς λύσης για τις χρονικές στιγμές $t = 0, 2, 4$.
- (β') Διατυπώστε τη μέθοδο upwind, για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό με χρονικό βήμα τ και χωρικό βήμα h , για το πρόβλημα αυτό και υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης στα σημεία $x = 1, 2, 3, 4$ στον τελικό χρόνο $t = 4$, παίρνοντας:
 - (i) $h = 1$ και $\tau = 1$.
 - (ii) $h = 1$ και $\tau = 2$.
 - (iii) $h = 1$ και $\tau = 4$.

Ποιά είναι η συνθήκη CFL για το σχήμα αυτό;

5. Λύστε τις ασκήσεις **6.5**, **6.12**, (σελίδες 274-275) του βιβλίου: Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Παν. Εκδόσεις Κρήτης.
6. Λύστε τις ασκήσεις **7.3**, **7.4**, **7.12** (σελίδες 320-321) του βιβλίου: Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Παν. Εκδόσεις Κρήτης.