Πέμπτη 17 Απριλίου 2008

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = y + 4\pi t\cos(2\pi t^2)\,y, \quad t \in [0,2], \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα (Fortran ή C (σε διπλή ακρίβεια) ή Matlab) για την επίλυση του (1), για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h = (b-a)/n$, το οποίο να υλοποιεί την κλασσική μέθοδο των Runge-Kutta με τέσσερα στάδια, που δίνεται από το μητρώο

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array} \tag{2}$$

   Το πρόγραμμά σας θα πρέπει ακόμη, να υπολογίζει και να εκτυπώνει στην οθόνη το σφάλμα της μεθόδου (2), $\max\limits_{0\le n\le N} |y^n - y(t^n)|$.

   (α′) Αποδείξτε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση και βρείτε την αναλυτικά.

   (β′) Υπολογίστε προσεγγίσεις της λύσης με τη μέθοδο (2), καθώς και τα σφάλματα, για ομοιόμορφους διαμερισμούς με $N = 32, 64, 128, \ldots, 2048$.

   (γ′) Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και τις προσεγγίσεις της με τη μέθοδο (2) για $N = 128$ υποδιαστήματα, και αποθηκεύστε το σχήμα σε ένα (postscript) αρχείο.

   (δ′) Βεβαιωθείτε υπολογιστικά ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου (2) είναι 4.
   Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ως εξής: Έστω $\mathcal{E}(N)$ το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου για N υποδιαστήματα, και ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{E}(N) \approx Ch^p$, όπου η σταθερά h είναι ανεξάρτητη του h και του N. Τότε

$$\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)} \approx \frac{Ch^p}{C\left(\frac{h}{2}\right)^p} = 2^p \Rightarrow p \approx \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}(N)}{\mathcal{E}(2N)}\right)}{\log 2}.$$

   (ε′) Σχεδιάστε ένα log log γράφημα του σφάλματος $\mathcal{E}(N)$ συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων N για την μέθοδο (2), με $N = 32, 64, 128, \ldots, 2048$.

2. Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση `ode23` του Matlab, που χρησιμοποιεί έναν αλγόριθμο αυτόματης μεταβολής του βήματος, για να λύσετε το (1). Πάρτε ως αρχικό βήμα `InitialStep = 1.0e-2` και υπολογίστε τα σφάλματα όταν η παράμετρος `RelTol`, που καθορίζει το σχετικό μέγιστο σφάλμα, παίρνει τις τιμές `1.0e-2, 1.0e-3,...,1.0e-6`. Σε πόσα σημεία υπολογίζεται η λύση για κάθε μια από τις παραπάνω τιμές; Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα την αναλυτική λύση και την προσέγγιση που σας δίνει η `ode23` με `RelTol = 1.0e-4`.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

- Θα πρέπει να δουλέψετε σε ομάδες των δύο η τριών ατόμων. Οι ομάδες αυτές θα πρέπει να είναι οι ίδιες με των άλλων εργαστηριακών ασκήσεων.
- Η εξέταση της άσκησης θα γίνει την εβδομάδα 12–16/5, σε ώρες που θα ανακοινωθούν στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
- Την Τρίτη 13/5 κάθε ομάδα θα πρέπει να παραδώσει μια έκθεση (τυπωμένη κατά προτίμηση) στην οποία θα περιέχονται τόσο οι απαντήσεις στα αναλυτικά ερωτήματα, όσο και πίνακες με τα υπολογιστικά αποτελέσματα, καθώς και σχολιασμός τους.