

### Ασκήσεις - 7ο Φυλλάδιο

1. Σε κάθε μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις εφαρμόστε τη διαδικασία Gram-Schmidt για το υποσύνολο  $S$  του χώρου με εσωτερικό γινόμενο  $V$ . Στη συνέχεια βρείτε μια ορθοκανονική βάση  $\mathcal{B}$  του  $V$  και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier του δεδομένου διανύσματος ως προς τη βάση  $\mathcal{B}$ .

(1)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 3)\}$  και  $x = (1, 1, 2)$ .

(2)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  και  $x = (1, 0, 1)$ .

(3)  $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ,  $S = \{1, x, x^2\}$  και  $f(x) = 1 + x$ . (Εδώ  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ .)

2. Έστω  $V = \mathbb{C}^3$ , και  $S = \{(1, 0, i), (1, 2, 1)\}$ . Βρείτε το  $S^\perp$ .
3. Έστω  $V$  ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και  $W$  ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του  $V$ . Αν  $x \notin W$ , αποδείξτε ότι υπάρχει ένα  $y \in V$ , τέτοιο ώστε  $y \in W^\perp$ , αλλά  $\langle x, y \rangle \neq 0$ .
4. Έστω  $A$  μιγαδικός  $n \times n$  πίνακας του οποίου οι στήλες αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο. Αποδείξτε ότι  $AA^* = I$ .
5. Έστω  $V$  ένας χώρος εσωτερικού γινομένου,  $S, S_0$  υποσύνολα του  $V$  και  $W$  ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του  $V$ . Αποδείξτε τα ακόλουθα:
- Αν  $S_0 \subseteq S$ , τότε  $S^\perp \subseteq S_0^\perp$ .
  - $S \subseteq (S^\perp)^\perp$  και, επομένως,  $\text{span}(S) \subseteq (S^\perp)^\perp$ .
  - $W = (W^\perp)^\perp$ .
  - $V = W \oplus W^\perp$ .
6. (Ο τύπος του Parseval.) Έστω  $V$  ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  μια ορθοκανονική βάση του  $V$ . Αποδείξτε ότι για κάθε  $x, y \in V$  ισχύει:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle}.$$

7. (Η ανισότητα του Bessel.) Έστω  $V$  ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του  $V$ . Αποδείξτε ότι για κάθε  $x \in V$  ισχύει:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |\langle x, x_i \rangle|^2.$$