ΕΜ211: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ακαδ. έτος 2010–2011

Τετάρτη 11 Μαΐου 2011

Ασκήσεις - 6ο Φυλλάδιο

1. Έστω $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας ($A = A^T$). Δείξτε ότι αν $A^2 = \mathbb{O}$, τότε $A = \mathbb{O}$.

2. Θεωρήστε την απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $T(x, y) = (2x - y, y, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Για ποιά $t \in \mathbb{R}$ είναι η T γραμμική;

3. Εξετάστε αν ο τελεστής $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ με $T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$ διαγωνιοποιείται. Αν ναι, βρείτε μια βάση $\mathcal{C}$ τέτοια ώστε ο πίνακας $\mathcal{M}(T; \mathcal{C})$ να είναι διαγώνιος.

4. Έστω πίνακας $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $f(t) = t^2 + t + 1$. Δείξτε ότι $A^3 = I_2$.

5. Θεωρήστε το χώρο $C([0, 1])$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, για κάθε $f, g \in C([0, 1])$. Αν $f(t) = t$ και $g(t) = \mathrm{e}^t$ υπολογίστε τα $\langle f, g\rangle$, $\|f\|$, $\|g\|$ και $\|f + g\|$. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα και η ανισότητα Cauchy-Schwarz.

6. Αιτιολογήστε γιατί τα ακόλουθα δεν είναι εσωτερικά γινόμενα σε καθέναν από τους δεδομένους διανυσματικούς χώρους

   (α′) $\langle (a, b), (c, d)\rangle = ac - bd$ στον $\mathbb{R}^2$.

   (β′) $\langle A, B\rangle = tr(A + B)$ στον $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (γ′) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g(t)\,dt$ στον $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

7. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης και $\mathcal{B}$ μια βάση του. Αποδείξτε ότι αν $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall x \in \mathcal{B}$, τότε $y = 0$.

8. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $x, y \in V$ *ορθογώνια* (δηλ. $\langle x, y\rangle = 0$). Αποδείξτε ότι: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

9. Αποδείξτε τον *κανόνα του παραλληλογράμμου* σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου, δηλ. ότι για κάθε $x, y \in V$ ισχύει:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

10. Έστω V ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $T \in \mathcal{L}(V)$ τέτοιος ώστε $\|T(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in V$. Αποδείξτε ότι ο T είναι 1-1.

11. Έστω $V = C([0, 1])$ και ορίζουμε $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{1/2} f(t)g(t)\,dt$. Είναι εσωτερικό γινόμενο στον V;