Ασκήσεις

Κεφάλαιο 2: Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων

1. Θεωρήστε την εξίσωση $x = \frac{5}{x^2} + 2$. Αποδείξτε ότι έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$. Προσδιορίστε ένα διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε η γενική επαναληπτική μέθοδος $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, όπου $\phi(x) = \frac{5}{x^2} + 2$, να συγκλίνει για $x_0 \in [a, b]$.

2. Έστω $x_0 \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, με $x_{n+1} = \left(\frac{e^{x_n}}{3}\right)^{1/2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, συγκλίνει, και το όριό της ανήκει στο διάστημα [0,1].

3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) := x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες. Θεωρήστε την ακολουθία της μεθόδου του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$, δεδομένου ενός $x_0 \in \mathbb{R}$. Διερευνήστε για ποιές τιμές του x_0 η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάποια από τις ρίζες.

Κεφάλαιο 3: Γραμμικά συστήματα

1. Αποδείξτε τις ακόλουθες προτάσεις ή δώστε αντιπαραδείγματα για να δείξετε ότι δεν ισχύουν.

   (α′) Το γινόμενο δύο συμμετρικών πινάκων είναι συμμετρικός πίνακας.

   (β′) Ο αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου συμμετρικού πίνακα είναι συμμετρικός.

   (γ′) Αν A και B είναι $n \times n$ πίνακες, τότε $(AB)^T = A^T B^T$.

2. Υποθέστε ότι οι A και B είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι $n \times n$ πίνακες.

   (α′) Είναι ο $-A$ θετικά ορισμένος;

   (β′) Είναι ο $A + B$ θετικά ορισμένος;

   (γ′) Είναι ο A^2 θετικά ορισμένος;

   (δ′) Είναι ο $A - B$ θετικά ορισμένος;

3. Έστω λ μια ιδιοτιμή ενός $n \times n$ πίνακα A και $x \neq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

   (α′) Δείξτε ότι η λ είναι ιδιοτιμή και του A^T.

   (β′) Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $k \geq 1$, ο λ^k είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα το x.

   (γ′) Δείξτε ότι αν ο A αντιστρέφεται, τότε ο $1/\lambda$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1} με ιδιοδιάνυσμα το x.

   (δ′) Έστω $\alpha \neq \lambda$ δεδομένο. Δείξτε ότι αν ο $A - \alpha I$ αντιστρέφεται, τότε ο $1/(\lambda - \alpha)$ είναι ιδιοτιμή του $(A - \alpha I)^{-1}$ με ιδιοδιάνυσμα το x.

4. Βρείτε πίνακες A και B για τους οποίους $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$. (Συμπεράνετε ότι η ποσότητα $\rho(A)$ δεν μπορεί να είναι νόρμα πίνακα.)

5. Αποδείξτε ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$.

6. Αποδείξτε ότι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \, \|A\|_\infty}$.

7. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Αν με $\kappa(A)$ συμβολίζουμε το δείκτη κατάστασης ενός πίνακα A ως προς μια νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$, αποδείξτε ότι $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$, $\forall \alpha \neq 0$, και $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\, \kappa(B)$.

8. Αποδείξτε ότι η ποσότητα

$$\|A\|_{①} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

   είναι νόρμα πίνακα. Είναι φυσική νόρμα πίνακα;

9. Έστω S ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε $\|x\| = (x^T S x)^{1/2}$. Δείξτε ότι έτσι ορίζεται μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. [Υπόδειξη: Αρχικά δείξτε ότι $x^T S y = y^T S x \leq (x^T S x)^{1/2} (y^T S y)^{1/2}$.]

10. Έστω A ένας πραγματικός, αντιστρέψιμος πίνακας και έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την ποσότητα $\|\cdot\|'$ ως $\|x\|' := \|Ax\|$. Αποδείξτε ότι και η $\|\cdot\|'$ είναι μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Κεφάλαιο 4: Παρεμβολή

1. Δίνεται ο διαμερισμός $x_0 = 0$, $x_1 = 0.05$, $x_2 = 0.1$ του διαστήματος [0,0.1]. Βρείτε τη γραμμική spline παρεμβολής s_1 της συνάρτησης $f(x) = e^{2x}$ στα σημεία x_0, x_1, x_2. Βρείτε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_0^{0.1} e^{2x} dx$ υπολογίζοντας το $\displaystyle\int_0^{0.1} s_1(x)\, dx$, και συγκρίνετέ το με την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος.

2. Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, με $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$, και έστω $\omega(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. Αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα Lagrange L_i μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$L_i(x) = \begin{cases} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)} & , \quad x \neq x_i \\ 1 & , \quad x = x_i \end{cases} , \quad i = 0, \ldots, n.$$

Κεφάλαιο 6: Αριθμητική Ολοκλήρωση

1. Χρησιμοποιήστε τον ακόλουθο πίνακα

x	1.1	1.3	1.5
e^x	3.0042	3.6693	4.4817

για να υπολογίσετε μια προσέγγιση του ολοκληρώματος $\displaystyle\int_{1.1}^{1.5} e^x dx$ με

(α′) τον κανόνα του τραπεζίου με $x_0 = 1.1$ και $x_1 = 1.5$,

(β′) τον κανόνα του Simpson με $x_0 = 1.1$, $x_1 = 1.3$ και $x_1 = 1.5$.

2. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του τραπεζίου για να υπολογίσετε προσεγγίσεις των ακόλουθων ολοκληρωμάτων και συγκρίνετέ τις με τις ακριβείς τιμές.

(α′) $\displaystyle\int_0^{0.1} \sqrt{1+x}\, dx$,

(β′) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2\, dx$,

(γ′) $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{x}\, dx$,

(δ′) $\displaystyle\int_1^{5.5} \frac{1}{x}\, dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x}\, dx$.

Ποιό από τα (γ) και (δ) δίνει καλύτερη προσέγγιση και γιατί;

3. Χρησιμοποιήστε το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου με ομοιόμορφο διαμερισμό από n υποδιαστήματα για να υπολογίσετε προσεγγίσεις των ακόλουθων ολοκληρωμάτων, και συγκρίνετέ τις με τις ακριβείς τιμές.

(α′) $\displaystyle\int_1^{3} \frac{1}{x}\, dx$, $n = 4$.

(β′) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx$, $n = 8$.

(γ′) $\displaystyle\int_0^{1} \sin \pi x\, dx$, $n = 6$.