Τμημα Εφαρμοσμενων Μαθηματικων — Ακαδ. έτος 2006–2007

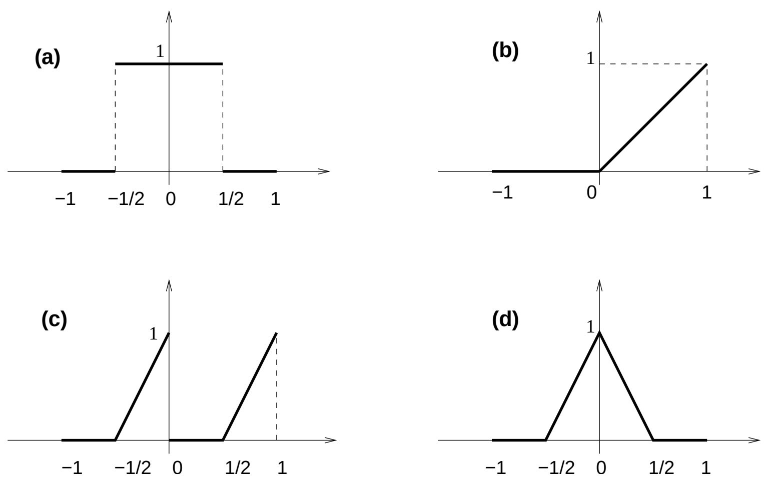
ΕΜ152: Εισαγωγη στα Εφαρμοσμενα Μαθηματικα ΙΙ — Διδάσκων: Δ. Μητσούδης.

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Παράδοση: Παρασκευή 25/5/2007.

1. Υπολογίστε τους συντελεστές a_n, b_n της σειράς Fourier για τις συναρτήσεις:
(α′) $f(x) = x^2, \quad -1 < x < 1.$ (β′) $g(x) = \sin x, \quad -\pi < x < \pi.$

2. Θεωρήστε τις ακόλουθες συναρτήσεις στο (-1,1):



Για καθεμία από τις συναρτήσεις αυτές υπολογίστε τους συντελεστές Fourier, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση στο διάστημα (-2,2) της συνάρτησης στην οποία συγκλίνει η σειρά Fourier και ελέγξτε το είδος της σύγκλισης (σημειακή ή ομοιόμορφη).

3. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα για τα ακόλουθα προβλήματα:

(α′) $u''(x) + \lambda u(x) = 0,\ 0 < x < 2, \quad u(0) = 0,\ u'(2) = 0.$

(β′) $u''(x) + \lambda u(x) = 0,\ -\pi < x < \pi, \quad u(-\pi) = u(\pi),\ u'(-\pi) = u'(\pi).$

4. Υπολογίστε την λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση του κύματος:

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = \mathrm{e}^x, \quad u_t(x,0) = \sin x.$$

5. Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$u_{xx} - 3u_{xt} - 4u_{tt} = 0, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = \mathrm{e}^x.$$

(*Υπόδειξη.* Παραγοντοποιήστε το διαφορικό τελεστή όπως κάναμε και για την εξίσωση του κύματος.)

6. Λύστε με την μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση του κύματος:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0,\\
&u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases},\\
&u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1,\\
&u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

7. Λύστε με την μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας:

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0,\\
&u(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases},\\
&u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

8. Λύστε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας:

$$
\begin{aligned}
&u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0,\\
&u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1,\\
&u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

(*Υπόδειξη.* Το πρόβλημα αυτό δεν μπορεί να λυθεί με χωρισμό μεταβλητών λόγω της μη ομογενούς συνοριακής συνθήκης $u(0,t) = 1$. Θέστε $v(x,t) := u(x,t) - (1-x)$ για $0 < x < 1,\ t > 0$ και λύστε το αντίστοιχο πρόβλημα για την v.)