

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων
Παράδοση: Τετάρτη 25/4/2007.

1. Λύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned}(\alpha') \quad & u_t + 2u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ & u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\beta') \quad & u_t - u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ & u(x, 0) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ 1 - |x|, & |x| \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma') \quad & u_t + 4u_x = u, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ & u(x, 0) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\delta') \quad & u_t + 2txu_x = u, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ & u(x, 0) = x, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\epsilon') \quad & u_t + 2u_x = 1, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ & u(x, 0) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t + u^2 u_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Να βρεθούν και να αποδοθούν γραφικά οι χαρακτηριστικές καμπύλες. Στη συνέχεια βρείτε μια λύση κρουστικού κύματος, και σχεδιάστε στιγμιότυπα της λύσης u συναρτήσει του x , για $t = 0, 0.5$ και 1 .

3. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t + 2uu_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 4, & x \leq 0 \\ 4 - \frac{x}{2}, & 0 < x < 4 \\ 2, & x \geq 4 \end{cases}.\end{aligned}$$

(α') Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές.

(β') Βρείτε το χρόνο θραύσης του κύματος t_b .

(γ') Υπολογίστε τη λύση του προβλήματος για $t < t_b$, και μια λύση για $t > t_b$.

4. Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

(α') Βρείτε μια (συνεχή) λύση σε μορφή κύματος αραίωσης.

(β') Ελέγξτε αν υπάρχει λύση σε μορφή κρουστικού κύματος. Ικανοποιείται για τη λύση αυτή η συνθήκη εντροπίας;